Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Examen de Admisión a la Maestría en Matemáticas

23 de junio de 2017

NOMBRE DEL ASPIRANTE: ______________________________

1. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{sen} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

   Determina los puntos en los que la función es continua y los puntos en los que es diferenciable.

2. Demostrar que

$$0 < \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx < \infty.$$

3. Sea A una matriz de tamaño 2×2 tal que $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ son eigenvectores con eigenvalores respectivos 0 y 1. Encuentra la matriz A.

4. Sea V un espacio vectorial real con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y sean S y T transformaciones lineales de T en sí mismo, y tales que una transformación es adjunta de la otra, es decir

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, S(v) \rangle, \qquad \forall u, v \in V.$$

   Demostrar que $[\operatorname{Ker}(T)]^\perp = \operatorname{Ran}(S)$.

5. Sea C una curva diferenciable simple cerrada en $\mathbb{R}^2$ y sea Ω el subconjunto abierto acotado por C. Probar que para toda $g \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ se cumple la igualdad

$$\int_\Omega \Delta g = \int_C (\nabla u) \cdot \vec{n}$$

   donde $\vec{n}$ es normal exterior a Γ y $\|n\| = 1$.

6. Dado un grupo G y un subconjunto $S \subset G$ arbitrario definimos

$$H_S = \{x \in G \mid \ xs = sx,\ \forall s \in S\}$$

   Demostrar que H_S es un subgrupo de G, y que en el caso en que $G = S$ el grupo H_G es abeliano.

7. Para el conjuto de los números reales con la métrica usual, sea

$$A = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

   Verificar que $\bar{A} \subset \mathbb{Q}$.

8. Determina todos los valores que puede tomar en $\mathbb{C}$ la expresión i^i.

9. Sean $\|\cdot\|_A$ y $\|\cdot\|_B$ normas en $\mathbb{R}^2$. Demostrar que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es abierto respecto a la norma $\|\cdot\|_A$ si y solo si es abierto respecto a la norma $\|\cdot\|_B$ (en otras palabras, hay que probar que las normas son equivalentes).

10. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y''' - 3y' - 2y = 0.$$